


Призра́к

Платона

Модернистская трансформация
математики

Дж. Грей

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
«КАН  Н-ПЛЮС»

2021

УДК 1/14
ББК 87.4
Г 79



Грей Дж.
Г79 **Призрак Платона: модернистская трансформация математики /**
Дж. Грей: пер. с англ. В.В. Целищев. – М.: Канон+ РООИ «Реабилитация», 2021. – 624 с.

ISBN 978-5-88373-693-2

«Призрак Платона» – первая книга, в которой рассматривается развитие математики с 1880 по 1920 год как результат влияния модернизма, подобного тому, что происходил в искусстве, литературе и музыке. Джереми Грей прослеживает рост математического модернизма при взаимодействии с физикой, философией, теологией, психологией и идеями о реальных и искусственных языках. Автор показывает, как модернизм привел к решению многих проблем, а также поставил еще более глубокие и, в конечном счете, неразрешимые вопросы.

Грей демонстрирует, как математики-модернисты считали, что они продвинулись дальше, чем кто-либо до них, только чтобы сделать более глубокие ошибки. Он рассказывает историю этих амбициозных и блестящих математиков, в том числе Рихарда Дедекинда, Анри Лебега, Анри Пуанкаре, Давида Гильберта и многих других. Он описывает оживленные дебаты вокруг новых объектов, определений и доказательств в математике, возникшие в результате использования наивной теории множеств и возрожденного аксиоматического метода, – дебаты, которые переросли в современные аргументы в философии, включая кризис оснований и математический платонизм.

«Призрак Платона» – обязательное чтение для математиков и историков математики. Книга может быть плодотворно использована в качестве дополнения к различным курсам философии, включая философию математики и логики, историю аналитической философии и философию науки.

ББК 87.4

Охраняется законодательством об авторском праве. Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается, в том числе и в Интернете, без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения законодательства будут преследоваться в судебном порядке.

ISBN 978-5-88373-693-2

© Грей Дж.

Перевод с англ. Целищев В.В., 2021
©Издательство «Канон+»
РООИ «Реабилитация»,
оригинал-макет, оформление, 2021

Ну и что?

Друзья считали в школе тогда:
Он будет важным лицом;
Он думал так же и жил, как всегда,
Другие терпели бремя труда;
Призрак Платона пел: «Ну и что?»

Все прочли, о чем он писал,
И так он добыл денег
Для себя и для друзей своих,
Самых истинных и дорогих;
Призрак Платона пел: «Ну и что?»

Осуществились его мечты:
Дети, жена, маленький дом,
Сливовый сад, капусты кусты,
Среди поэтов достиг высоты;
Призрак Платона пел: «Ну и что?»

«Труд окончен», он поседел,
«Вот и все, о чем я мечтал;
Пусть кричат, что я плох, неумел,
Но что-то я сделать все же успел».
Призрак Платона пел: «Ну и что?»

Уильямс Йейтс

Оглавление

Краткое содержание	5
ВВЕДЕНИЕ	11
1.1. Вводные замечания	11
1.2. Некоторые математические концепции	28
Глава 1. МОДЕРНИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИКА	31
1.1. Модернизм в отраслях математики	31
1.2. Изменения в философии	37
1.3. Модернизация математики	49
Глава 2. ДО МОДЕРНИЗМА	57
2.1. Геометрия	57
2.2. Анализ	79
2.3. Алгебра	101
2.4. Философия	104
2.5. Британская алгебра и логика	131
2.6. Консенсус 1880 года	143
Глава 3. ПРИБЫТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕРНИЗМА	145
3.1. Современная геометрия: фрагментарная абстракция	145
3.2. Современный анализ	166
3.3. Алгебра	189
3.4. Современная логика и теория множеств	200
3.5. Взгляд из Парижа и Сент-Луиса	216
Глава 4. ПРИЗНАННЫЙ МОДЕРНИЗМ	222
4.1. Геометрия	222
4.2. Философия и математика в Германии	244
4.3. Алгебра	265
4.4. Современный анализ	270
4.5. Модернистские объекты	292
4.6. Американские философы и логики	297
4.7. Парадоксы теории множеств	307
4.8. Тревога	330
4.9. Примирение с Кантом	345
Глава 5. ЛИКИ МАТЕМАТИКИ	379
5.1. Введение	379
5.2. Математика и физика	380
5.3. Измерение	406
5.4. Популяризация математики около 1900 года	428
5.5. Написание истории математики	452
Глава 6. МАТЕМАТИКА, ЯЗЫК, ПСИХОЛОГИЯ	462
6.1. Языки естественные и искусственные	462
6.2. Математический модернизм и психология	478
Глава 7. ПОСЛЕ ВОЙНЫ	500
7.1. Основания математики	500
7.2. Математика и механизация мышления	531
7.3. Возникновение математического платонизма	542
7.4. «Победил» ли модернизм?	557
7.5. Дело сделано	565
Bibliography	569
Указатель	607
Послесловие переводчика	612

Краткое содержание

ВВЕДЕНИЕ	11
I.1. Вводные замечания	11
I.1.1.1. Математический модернизм	11
I. 1.1.1. ЧТО ЕСТЬ В ЭТОЙ КНИГЕ	14
I. 1.1.2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕРНИЗМА	15
I. 1.1.3. ПЕРВЫЙ ОБЗОР	17
I. 1.1.4. МОДЕРНИЗМЫ	18
I. 1.2. Moderne Sprache Mathematik Мертенса	21
I. 1.3. Отказ от ответственности	25
I. 1.3.1. СОВРЕМЕННОСТЬ	25
I. 1.3.2. ЧЕМ ЭТА КНИГА НЕ ЯВЛЯЕТСЯ	26
I. 1.3.3. ПРИЗРАК ПЛАТОНА	28
I.2. Некоторые математические концепции	28
Геометрия: <i>неевклидова геометрия; проективная (не-метрическая) геометрия; Клейновский взгляд на геометрию (Эрлангенская Про- грамма); аксиоматическая геометрия; n-мерная геометрия</i>	28
Анализ: <i>натуральные числа; действительные числа; непрерывные но нигде не дифференцируемые функции; непрерывная кривая; тео- рия меры; топология</i>	29
Алгебра: <i>теория групп; алгебраическая теория чисел; теория Галуа</i> Теория множеств: <i>теория множеств; ординальные и кардинальные числа</i>	29
Логика: <i>интуиционистская логика; формальные языки; теория дока- зательства; логики первого и второго порядков</i>	30
Глава 1. МОДЕРНИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИКА	31
1.1. Модернизм в отраслях математики	31
1.1.1. Онтология и эпистемология	33
1.1.2. Психология и язык	36
1.2. Изменения в философии	38
1.2.1. Путь от Канта	38
1.2.2. Путь к логике и логицизму	42
1.2.3. Формализм	43
1.2.4. Наука, математика и философия	47
1.3. Модернизация математики	49
1.3.1. Эксперты и аудитория	49
1.3.2. Профессионализация	52
Глава 2. ДО МОДЕРНИЗМА	57
2.1 Геометрия	57
2.1.1. Проективная Геометрия	57
2.1.1.1. ПОЛЮС И ПОЛЯРА	59
2.1.1.2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ	61
2.1.2. Неевклидова геометрия	63
2.1.2.1. ЛОБАЧЕВСКИЙ	64

2.1.2.2. БОЙЯИ	65
2.1.2.3. ЗНАЧИМОСТЬ	67
2.1.2.4. ГЕОМЕТРИЯ	68
2.1.3. Одобрение: Риман и Бельтрами	71
2.1.3.1. БЕЛЬТРАМИ	74
2.1.4. Профессиональные аспекты	76
2.2. Анализ	79
2.2.1. Что искать в истории математического анализа	79
2.2.2. Коши	84
2.2.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ ИНТЕГРАЛА	88
2.2.2.2. ПЕРВЫЕ ОТВЕТЫ	90
2.2.3. Вейерштрасс	92
2.2.4. Джордж Грин и теория потенциала	96
2.3. Алгебра	101
2.3.1. Алгебраическая теория чисел	101
2.4. Философия	104
2.4.1 Кант	104
2.4.2. Два посткантианца: Герbart и Фриз	110
2.4.2.1 ГЕРБАРТ	110
2.4.2.2. ФРИЗ	113
2.4.3. Математики и ученые как философы математики	116
2.4.3.1. ГРАССМАНН	116
2.4.3.2. РИМАН	119
2.4.4. Основания арифметики Кронекера	122
2.4.5. Основания арифметики и геометрии Гельмгольца	124
2.4.5.1. АРИФМЕТИКА	124
2.4.5.2. ГЕОМЕТРИЯ	126
2.4.6. Эрдман и Тобиас	128
2.4.6.1. ЭРДМАН	128
2.4.6.2. ТОБИАС	130
2.5. Британская алгебра и логика	131
2.5.1. Буль	132
2.5.2. Американцы: Пирс и Лэдл	137
2.5.2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЛОГИКА К 1880 ГОДУ	143
2.6. Консенсус 1880 года	143
Глава 3. ПРИБЫТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕРНИЗМА	145
3.1. Современная геометрия: фрагментарная абстракция	145
3.1.1. Проективная геометрия: взгляд Клейна	145
3.1.2. Проективная геометрия: строгость, двойственность, новые пространства, новые ингредиенты	150
3.1.3. Неевклидова геометрия	157
3.1.4. Проблема пространства Гельмгольца-Ли	160
3.1.4.1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФОРМЫ	163
3.2. Современный анализ	166
3.2.1. Чем являются действительные числа?	166
3.2.2. Канторовское введение трансфинитного	173

3.2.2.1. ОРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА	175
3.2.2.2. КАТОЛИЧЕСКИЙ МОДЕРНИЗМ	180
3.2.2.3. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА	182
3.2.2.4. КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА	183
3.2.3. Философия Поля дю Буа-Реймона	184
3.3. Алгебра	189
3.3.1. Дедекинд	189
3.3.2. Единство математики XIX века	193
3.3.3. Кронекер	196
3.4. Современная логика и теория множеств	200
3.4.1. Некоторые немецкие философы	200
3.4.2. Фреге	202
3.4.2.1. ФРЕГЕ О ЧИСЛЕ	204
3.4.2.2. GRUNDGESETZE ФРЕГЕ	208
3.4.3. Дедекинд	209
3.4.4. Пеано	214
3.5. Взгляд из Парижа и Сент-Луиса	216
Глава 4. ПРИЗНАННЫЙ МОДЕРНИЗМ	222
4.1. Геометрия	222
4.1.1. Абстрактная итальянская геометрия	222
4.1.2. Гильберт	225
4.1.2.1. ПРЯМОЛИНЕЙНОСТЬ И КРАТЧАЙШЕЕ РАССТОЯНИЕ	233
4.1.2.2. ПУАНКАРЕ	234
4.1.2.3. ЭНРИКЕС	236
4.1.3. Неявные определения	236
4.1.4. Тезис Нагеля–Эрикеса	237
4.1.5. Неевклидова геометрия	238
4.1.6. Геометрический конвенционализм Пуанкаре	240
4.1.6.1. КАЛИНОН И ЛЕШАЛА	244
4.2. Философия и математика в Германии	244
4.2.1. Геометрия и интуиция	244
4.2.1.1. КЛЕЙН	246
4.2.1.2. ХЁЛДЕР	249
4.2.1.3. БОРЕЛЬ	252
4.2.2. Гильберт, Гуссерль, Фреге	254
4.2.3. Гильберт, Нельсон и Неофризианцы	261
4.3. Алгебра	265
4.3.1. Теория групп	266
4.3.2. Векторные пространства	268
4.4. Современный анализ	270
4.4.1. Французские модернисты	270
4.4.1.1. ТЕОРИЯ МЕРЫ	271
4.4.2. Размерность	280
4.4.3. Непрерывные кривые	282
4.4.4. Рис о пространстве и топологии	287
4.4.5. Модернизм и современный анализ	290

4.5. Модернистские объекты	292
4.5.1. Новые числа Гензеля	293
4.5.2. Узлы и топология	295
4.6. Американские философы и логики	297
4.6.1. Пирс	297
4.6.1.1. РАССЕЛ ПРОТИВ ПИРСА	299
4.6.2. Ройс	302
4.6.3. Американские аксиоматизаторы	306
4.7. Парадоксы теории множеств	307
4.7.1. Размышление о множествах	307
4.7.2. Парадокс	311
4.7.3. Первые мысли Гильберта	313
4.7.4. Цермело и вполне-упорядочение	316
4.7.5. «Пять Писем»	318
4.7.6. Аксиоматизация Цермело	322
4.7.7. Пуанкаре: непредикативность	324
4.7.8. Спор Шёнфлиса и Корселя	328
4.8. Тревога	330
4.8.1. Признание ошибки	330
4.8.2. Тревога: Кронекер и Энрикес	338
4.8.3. Инаугурационная речь Перрона	341
4.9. Примирение с Кантом	345
4.9.1. Лейбницевское оживление	345
4.9.1.1. РАССЕЛ	347
4.9.2. Ответы Пуанкаре	350
4.9.3. Рассел и Уайтхед	353
4.9.3.1. ХАУСДОРФ	357
4.9.4. Около 1910 года: Вейль, Винтер, Штуди и Кассирер	360
4.9.4.1. ВЕЙЛЬ	361
4.9.4.2. ВИНТЕР	363
4.9.4.3. ШТУДИ	364
4.9.4.4. КАССИРЕР	368
4.9.5. Брауэр	374
Глава 5. ЛИКИ МАТЕМАТИКИ	379
5.1. Введение	379
5.2. Математика и физика	380
5.2.1. О роли математики в физике	380
5.2.2. Максвелл	382
5.2.3. Риман	383
5.2.4. Пуанкаре против Дюгема	385
5.2.4.1. ЛЕ РОЙ И ДЮГЕМ	387
5.2.5. Герц	391
5.2.6. Гильберт	394
5.2.7. Минковский	397
5.2.8. Эйнштейн	401
5.3. Измерение	406

5.3.1. Классические и репрезентационные теории	406
5.3.2. Пуанкаре	408
5.3.3. Измерение бесконечно малых	411
5.3.3.1. ЧИСЛА ДЮ БУА-РЕЙМОНА И ШТОЛЬЦА	411
5.3.4. Беттаци	414
5.3.4.1. ДЕБАТЫ БЕТТАЦИ-ВИВАНТИ	416
5.3.5. Веронезе	418
5.3.6. Хёлдер	422
5.3.7. Фреге	424
5.3.8. Рассел: измерение как упорядочение	425
5.3.9. Кэмпбелл об измерениях в физике	426
5.4. Популяризация математики около 1900 года	428
5.4.1. Введение	428
5.4.2. Поль Карус	433
5.4.3. Пуанкаре	437
5.4.4. Энрикес	440
5.5. Написание истории математики	452
5.5.1. История и историки в Германии	452
5.5.1.1. НЕМЕЦКИЕ ИСТОРИКИ МАТЕМАТИКИ	454
5.5.2. История и историки во Франции и Италии	456
5.5.2.1. ФРАНЦУЗСКИЕ ИСТОРИКИ МАТЕМАТИКИ	456
5.5.2.2. ИТАЛЬЯНСКИЕ ИСТОРИКИ МАТЕМАТИКИ	457
5.5.3. Зачем писалась история математики	458
5.5.3.1. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ	458
5.5.3.2. СВЯЗЬ С МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕРНИЗМОМ?	460
Глава 6. МАТЕМАТИКА, ЯЗЫК , ПСИХОЛОГИЯ	462
6.1. Языки естественные и искусственные	462
6.1.1. Национальные языки в математике около 1900 г.	463
6.1.2. Международный язык	464
6.1.3. Математика как язык	469
6.1.4. Идеальный язык	469
6.1.5. Лингвистика XIX века	472
6.1.6. Семантика	473
6.1.7. Гильберт и семантика	475
6.2. Математический модернизм и психология	478
6.2.1. Пуанкаре	478
6.2.2. Интуиция и психология в немецкой среде	483
6.2.3. Гельмгольц о знании и зрительном восприятии	483
6.2.4. Вильгельм Вундт	486
6.2.5. Когнитивные основания математики	490
6.2.5.1. ВУНДТ	491
6.2.5.2. ЛИППС	493
6.2.5.3. САНТЕРР	496
Глава 7. ПОСЛЕ ВОЙНЫ	500
7.1. Основания математики	500
7.1.1. Введение и обзор	500
7.1.2. Гильберт и теория доказательства	505

7.1.3. Брауэр и Вейль	509
7.1.4. Аксиоматическая теория множеств	523
7.1.5. Гёдель	527
7.1.5.1. ЭПИЛОГ	530
7.2. Математика и механизация мышления	531
7.2.1. Могут ли компьютеры мыслить?	531
7.2.2. Гильберт	534
7.2.3. Тьюринг и тест Тьюринга	538
7.2.4. Фон Нейман и нейронные сети	540
7.3. Возникновение математического платонизма	542
7.3.1. Работающие платонисты?	542
7.3.2. Антиплатонизм Шлика	544
7.3.3. Формулировка Бернаиса	547
7.3.4. Платонизм, номинализм и фикционализм	548
7.3.5. Лингвистические каркасы Карнапа	551
7.3.6. Вызовы философии	552
7.3.7. Альтернативы платонизму...	553
7.3.8. ... и платонизм Геделя	555
7.3.9. Сад Гильберта	556
7.4. «Победил» ли модернизм?	557
7.4.1. Объекты	563
7.4.2. Доказательства	563
7.4.3. Философия математики	564
7.5. Дело сделано	565
Bibliography	569
Указатель	607
Послесловие переводчика	612